模块三 数列拔高题型

第 1 节 奇偶数列问题—求和篇（★★★☆）

内容提要

有的数列求和时需分 n 为奇数和偶数讨论，常见的有以下两类：

1．通项为奇偶分段的结构：例如，$a_n=\begin{cases}f(n),n为奇数\\g(n),n为偶数\end{cases}$，这种情况奇数项和偶数项各自构成不同类型的数列，求和时常按奇数项、偶数项分组求和.

2．通项含 $(-1)^n$ 这种结构：由于通项中含 $(-1)^n$，所以求和时会出现正负交替的现象，求和时常把相邻两项组合.

3．递推式中含 $(-1)^n$ 这类结构：可分奇偶讨论将递推式化简，再进行分析.

典型例题

类型Ⅰ：通项为奇偶分段的数列求和

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\begin{cases}2n-3,n为奇数\\2^{n-1},n为偶数\end{cases}$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和 $S_{10}=$______.

解析： $\{a_n\}$ 的通项是按奇偶分段的，故求和时，按奇数项、偶数项分组求，

由题意，$S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}=(a_1+a_3+a_5+a_7+a_9)+(a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10})$

$=(-1+3+7+11+15)+(2^1+2^3+2^5+2^7+2^9)=\dfrac{5\times(-1+15)}{2}+\dfrac{2\times(1-4^5)}{1-4}=717$.

答案： 717

【反思】若通项按奇偶分段，只需按奇数项、偶数项分组求前 n 项和即可.

【变式】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）令 $b_n=\begin{cases}a_n,n为奇数\\2^{a_n},n为偶数\end{cases}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

解：（1）（所给等式左侧其实是数列 $\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$ 的前 n 项和，这就是已知前 n 项和求通项的问题）

因为 $\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ ①，所以 $\dfrac{a_1}{2}=2-\dfrac{1+2}{2}=\dfrac{1}{2}$，故 $a_1=1$；

当 $n\geq 2$ 时，$\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{2^2}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2^{n-1}}=2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}}$ ②，

由① − ②可得：$\dfrac{a_n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}-(2-\dfrac{n+1}{2^{n-1}})=\dfrac{n+1}{2^{n-1}}-\dfrac{n+2}{2^n}=\dfrac{2(n+1)}{2^n}-\dfrac{n+2}{2^n}=\dfrac{n}{2^n}$，所以 $a_n=n$；

又 $a_1=1$ 也满足上式，所以 $\forall n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=n$.

（2）由（1）知 $a_n=n$，所以 $b_n=\begin{cases}n,n为奇数\\2^n,n为偶数\end{cases}$，

（数列 $\{b_n\}$ 的通项公式按奇偶分段，故求和时可按奇偶项分组求和，先考虑 n 为偶数的情形）

当 n 为偶数时，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=(b_1+b_3+\cdots+b_{n-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_n)$

$$=[1+3+\cdots+(n-1)]+(2^2+2^4+\cdots+2^n)=\frac{\frac{n}{2}(1+n-1)}{2}+\frac{2^2[1-(2^2)^{\frac{n}{2}}]}{1-2^2}=\frac{n^2}{4}+\frac{4(2^n-1)}{3};$$

（对于 n 为奇数的情形，可按上述方法重求，更简单的做法是补一项凑成偶数项，再减掉补的）

当 n 为奇数时，$S_n=S_{n+1}-b_{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{4(2^{n+1}-1)}{3}-2^{n+1}=\dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot2^{n+1}-\dfrac{4}{3}$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{4(2^n-1)}{3},n为偶数\\\dfrac{(n+1)^2}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot2^{n+1}-\dfrac{4}{3},n为奇数\end{cases}$.

类型Ⅱ：通项或递推式含 $(-1)^n$ 的数列求和

【例 2】设 $a_n=(-1)^n\cdot(4n-3)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=$______.

解析： 设 $b_n=4n-3$，则 $a_n=(-1)^n\cdot b_n$，$b_{n+1}-b_n=4(n+1)-3-(4n-3)=4\Rightarrow\{b_n\}$ 是公差为 4 的等差数列，

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=-b_1+b_2-b_3+b_4-\cdots+(-1)^nb_n$，

观察发现若按 $-b_1+b_2$，$-b_3+b_4$，$-b_5+b_6$，… 分组，则每组的和都为 4，能否恰好分完，由 n 的奇偶决定，故需讨论，先考虑 n 为偶数这种简单的情形，

当 n 为偶数时，$S_n=(-b_1+b_2)+(-b_3+b_4)+(-b_5+b_6)+\cdots+(-b_{n-1}+b_n)=\dfrac{n}{2}\times4=2n$；

对于 n 为奇数的情形，可以按上面的方法重新计算，分完组最后会余下一项，单独加上去即可. 但更简单的做法是补一项凑成偶数项，再把补的这项减掉，

当 n 为奇数时，$n+1$ 为偶数，且 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}$，

其中 S_{n+1} 由于下标为偶数，可代上面 n 为偶数时的结果来算，a_{n+1} 则代通项公式计算，

所以 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}=2(n+1)-(-1)^{n+1}\cdot[4(n+1)-3]=2n+2-(4n+1)=1-2n$；

综上所述，$S_n=\begin{cases}2n,n为偶数\\1-2n,n为奇数\end{cases}$.

答案： $\begin{cases}2n,n为偶数\\1-2n,n为奇数\end{cases}$

【反思】 当通项中有 $(-1)^n$ 时，常按相邻项分组求和；求和时先求 n 为偶数的情形，此时恰好分整数组，再求 n 为奇数的情形，可通过添项凑成偶数项，即 $S_n=S_{n+1}-a_{n+1}$，这样可以简化计算.

【例 3】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_2=4$，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3(n\in\mathbf{N}^*)$，求数列$\{a_n\}$的前 20 项和.

解：（递推公式中有$(-1)^n$这一结构，故考虑分奇偶讨论）

当n为奇数时，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3$即为$a_{n+2}-a_n=2$，

（若不懂上式的含义，可代一些值去看，将$n=1$，3，5 分别代入可得$a_3-a_1=2$，$a_5-a_3=2$，$a_7-a_5=2$，我们发现$\{a_n\}$的奇数项构成公差$d=2$的等差数列）

所以$a_1+a_3+\cdots+a_{19}=10a_1+\dfrac{10\times(10-1)}{2}d=20+45\times2=110$；

当n为偶数时，$a_{n+2}-a_n=(-1)^n+3$即为$a_{n+2}-a_n=4$，所以$\{a_n\}$的偶数项构成公差$d'=4$的等差数列，

故$a_2+a_4+\cdots+a_{20}=10a_2+\dfrac{10\times(10-1)}{2}d'=40+45\times4=220$；

所以$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=(a_1+a_3+\cdots+a_{19})+(a_2+a_4+\cdots+a_{20})=110+220=330$.

【反思】当递推公式中含有$(-1)^n$这种结构时，往往需要通过分奇偶讨论，化简递推式，再进行分析.

强化训练

1.（2023・新疆乌鲁木齐模拟・★★）若数列$\{a_n\}$满足$a_n=\begin{cases}2n-1,n为奇数\\(\sqrt{2})^n,n为偶数\end{cases}$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{20}=$______.（用具体数值作答）

2.（2023・湖北武汉模拟・★★★）已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(-1)^n(n^2-n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，前n项和为S_n，则$S_{40}=$______.

3.（★★）设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-a_n=1+(-1)^n$.

（1）求a_4，a_6；

（2）求S_{100}.

4.（2022・华侨、港澳台联考・★★★）设$\{a_n\}$是首项为 1，公差不为 0 的等差数列，且a_1，a_2，a_6成等比数列.

（1）求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）令$b_n=(-1)^n a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

5.（2022・重庆模拟・★★★★）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$2(S_n-n+2)=a_{n+1}$，且$a_2=10$，$b_n=a_n-1$.

（1）证明：$\{b_n\}$是等比数列；

（2）设$c_n=\begin{cases} b_n, n=2k \\ \dfrac{1}{\log_3 b_n \cdot \log_3 b_{n+2}}, n=2k-1 \end{cases}$，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，求数列$\{c_n\}$的前$2n+1$项和T_{2n+1}.